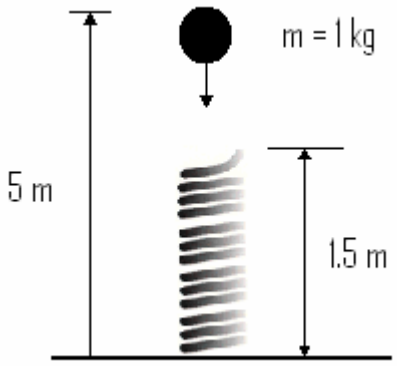
Problema 1. Desde una altura de 5.0 m se deja caer un objeto de 1.0 kg de masa, el cual "choca" con un resorte, de constante k = 50 N/m y 1.5 m de longitud, comprimiéndolo hasta quedar en reposo (véase figura). ¿Cuál es la compresión que sufre el resorte?



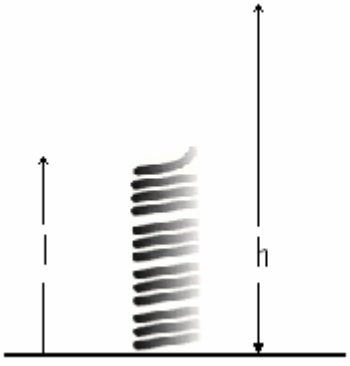
Solución

La forma más simple de resolver este problema es por conservación de la energía:

$$E_{T_i} = E_{c_i} + E_{p_i} = mgh$$

$$E_{T_f} = E_{c_f} + E_{p_f} = mg(l-x) + \frac{1}{2}kx^2$$

En donde h = altura inicial de la piedra, l-x = altura final de la piedra, x = compresión del resorte. Por lo tanto



$$mgh = mg(l-x) + \frac{1}{2}kx^2$$

Así que

$$x^2 - \frac{2mg}{k}x - \frac{2mg}{k}(h-l) = 0$$

Y entonces

$$x = \frac{+\frac{2mg}{k} \pm \sqrt{\frac{4m^2g^2}{k^2} + 4x\frac{2mg}{k}(h-l)}}{2}$$

$$= \frac{mg}{k} \pm \sqrt{\frac{m^2g^2}{k^2} + x\frac{2mg}{k}(h-l)}$$

Sustituyendo los datos, con $g = 9.8\,{}^{m}\!/_{s^2}$

$$x = 0.196 \pm \sqrt{(0.196)^2 + 1.372} =$$
$$= 0.196 \pm 1.188 = 1.384m$$

En donde no sea tomado en cuenta el signo negativo (¿por qué?).

■

Problema 2. Un anillo de $2\pi\,cm.$ de radio está cargado uniformemente y gira en torno a un eje que pasa por un centro (véase la figura 2.1). Si la carga total en el anillo es $q = 1.0\times10^{-8}$ C y su rapidez angular es de 100 revoluciones por segundo, ¿cuál es el campo magnético que genera en su centro?

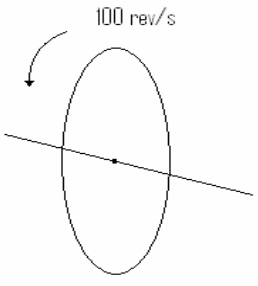


figura 2.1

Solución:

Por la ley de Biott Savart

$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{dl \times r}{r^3}$$

Para cualquier punto que diste una distancia r de dl. En particular, para el centro de la espira

$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{dl \times R}{R^3} = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{dl}{R^2}$$

y como $dl = Rd\theta$, entonces

$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{d\theta}{R}$$

así que

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\frac{2\pi}{R} = \frac{\mu_0 i}{2R}$$

y como $R = 2\pi \times 10^{-2}$ m

$$B = \frac{1.26\times10^{-6}}{4\pi\times10^{-2}}(i)$$

Pero tenemos que calcular i. Esta corriente se calcula sabiendo cuanta carga pasa por un punto del arillo por unidad de tiempo. En una revolución (es decir, en $\frac{1}{100}$ s) toda la carga pasa por un punto del arillo, así que

$$i = \frac{1.0\times10^{-8} C}{1.0\times10^{-2} s} = 1.0\times10^{-6} C$$

y entonces

$$B = \frac{(1.26\times10^{-6})(1.0\times10^{-6}}{4\pi\times10^{-2}} = 1.0\times10^{-11} Teslas$$

La dirección del campo se obtiene por la regla de la mano derecha. El campo está dirigido perpendicularmente al anillo y apuntando hacia la derecha.

■

Problema 3. Imagine dos bloques idénticos de masa m unidos a los extremos de un resorte ideal de constante elástica k y longitud natural L_0. El sistema se sitúa en posición vertical apoyado sobre una mesa, como se indica en la figura 3.1.

La masa superior se desplaza hacia abajo una distancia d, partiendo de su posición de equilibrio (figura 3.2), y a continuación se libera sin velocidad inicial.

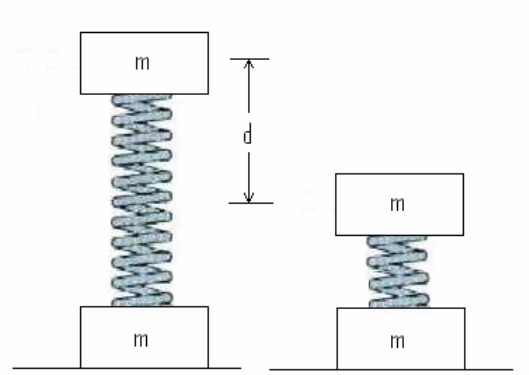


Fig. 3.1 Fig. 3.2

a) Determine el máximo valor de la reacción de la mesa sobre el bloque inferior.
b) Determine el mínimo valor de la distancia d para que la masa inferior llegue a levantarse de la mesa.

Solución:

a) El peso de la masa superior hará que el resorte se comprima una distancia $d_1 = mg/k$. Al comprimir el resorte una distancia extra d el resorte hará una fuerza total de

$$k(d + d_1)$$

que se sumará al peso de la masa inferior. La mesa, sino se quiebra,

efectuará una fuerza de reacción que contrarreste la suma de ambas fuerzas

$$\textbf{Reacción} = mg + k(d + d_1) = 2mg + kd$$

b) Para levantar la masa inferior el resorte debe efectuar una fuerza hacia arriba igual a mg, o sea debe estirarse una distancia d_1 más allá de su longitud natural.

Utilizando la conservación de la energía podemos establecer que el resorte inicialmente tiene una energía

$$\frac{1}{2}k(d + d_1)^2$$

que usará totalmente al llegar a su longitud natural, y deberá además tener una energía de

$$\frac{1}{2}kd_1^2$$

para estirarse y poder levantar a la masa inferior. En todo proceso la masa superior se desplaza una distancia

$$d + 2d_1$$

igualando ambas energías

$$\frac{1}{2}k(d + d_1)^2 + \frac{1}{2}kd_1^2 =$$
$$mg(d + 2d_1) = kd_1(d + 2d_1)$$

Lo que lleva a

$$d = d_1\sqrt{2}$$

■

Problema 4: Como se muestra en la figura 4.1, el péndulo de la izquierda se eleva a una altura h. Posteriormente se libera y colisiona con el péndulo de la derecha que permanecía en reposo. Supón que ambas masas son idénticas.

a) ¿Cuál es la velocidad de la esfera de la izquierda, precisamente antes de la colisión?
b) Si después de la colisión ambas esferas permanecen pegadas, ¿hasta qué altura h' (en términos de h), oscilará el sistema conjunto?
c) Se desplazan las dos esferas a una altura h, una hacia la izquierda y la otra hacia la derecha, después son liberadas, simultáneamente, desde el reposo y colisionan elásticamente. ¿A qué altura ascenderá cada una después de la colisión?
d) Ahora supón que las esferas tienen diferentes masas; m_1 es la masa de la izquierda y m_2 es la masa de la derecha. Se suelta m_1 de la altura h y choca con m_2, inicialmente en reposo. Después de la colisión, ambas se mueven juntas y alcanzan una altura de $h/3$. Determine la masa m_2 en términos de m_1.
e) Si ahora $m_1 = 3m_2$ y m_1 se suelta de la altura h mientras m_2 está en reposo, calcula las velocidades finales después de la colisión, asumiendo un choque elástico. Expresa el resultado en función de la velocidad inicial (v_0), de la masa m_1, justo antes de la colisión.

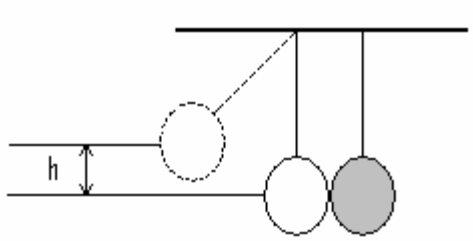


Figura 4.1

Solución:

a) Utilizado la conservación de la engría

Energía potencial = Energía cinética

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \text{ de donde } v = \sqrt{2gh}$$

b) Ahora utilizamos la conservación del momento

$$p_i = p_f$$

|Es decir el momento antes de la colisión es igual al momento después de la colisión, entonces

$$mv = (m+m)V \text{ de donde } V = \frac{v}{2}$$

Ahora la conservación de energía para el sistema conjunto:

$$\frac{1}{2}(m+m)V^2 = (m+m)gh'$$

por tanto

$$h' = \frac{V^2}{2g}$$

Sustituyendo la velocidad después de la colisión en la energía del sistema conjunto obtenemos:

$$h' = \frac{\left(v/2\right)}{2g} = \frac{v^2}{8g}$$

Como la velocidad del inciso a) y sustituyendo en la ecuación anterior

$$h' = \frac{\left(\sqrt{2gh}\right)^2}{8g} = \frac{2gh}{8g} = \frac{h}{4}$$

c) Dado que la colisión es elástica, por conservación de energía y momento ambas esferas rebotan con la misma velocidad pero en direcciones opuestas, regresando a su altura original.

d) Nuevamente utilizando la conservación de momento, tenemos:

$$m_1 v = (m_1 + m_2)V$$

Por otra parte la conservación de la energía antes y después de la colisión es:

$$m_1 gh = \frac{1}{2}m_1 v^2 \text{ así, } \quad v = \sqrt{2gh}$$

y

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 = (m_1 + m_2)g\frac{h}{3}$$

entonces

$$V = \sqrt{\frac{2gh}{3}} = \sqrt{2gh}\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{v}{\sqrt{3}}$$

Sustituyendo la velocidad final en la ecuación de conservación de momento

$$m_1 v = (m_1 + m_2)\left(\frac{v}{\sqrt{3}}\right)$$

Por tanto

$$m_2 = \left(\sqrt{3} - 1\right)m_1$$

e) La conservación de la energía nos dice que

$$\frac{1}{2}m_1 v_0 = \frac{1}{2}m_1 v_{izq}^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{der}^2$$

con $m_1 = 3m_2$

entonces $3v_0^2 = 3v_{izq}^2 + v_{der}^2$

además la conservación del momento es:

$$m_1 v_0 = m_1 v_{izq} + m_2 v_{der}$$

Usando $m_1 = 3m_2$ de nuevo

$$3v_0 = 3v_{izq} + v_{der}$$

Despejando $v_{der} = 3v_0 - 3v_{izq}$

Ahora de la ecuación anterior sustituimos en la ecuación $3v_0^2 = 3v_{izq}^2 + v_{der}^2$, entonces

$$2v_{izq}^2 - v_0 v_{izq} + v_0^2 = 0$$

Que es una ecuación cuadrática con dos posibles soluciones, resolviendo ahora para v_{izq}

$$v_{izq} = \frac{3v_0 \pm \sqrt{9v_0^2 - 8v_0^2}}{4}$$

Por lo que $v_{izq} = v_0$ o $v_{izq} = \frac{1}{2}v_0$.

Dado que la colisión es perfectamente elástica, la primera es físicamente inaceptable. Por tanto después de la colisión $v_{izq} = \frac{1}{2}v_0$ y de la ecuación $v_{der} = 3v_0 - 3v_{izq}$, tenemos $v_{der} = \frac{3}{2}v_0$

■

Problema 5. Un electrón es lanzado desde una de las placas de un condensador de placas paralelas (ver figura 5.1); su rapidez inicial es $v_0 = 6.0 \times 10^6 \, m/s$. Un campo eléctrico dirigido de la placa 1 a la placa 2, lo desvía a una trayectoria parabólica. La magnitud del campo eléctrico es $E = 2000 \, N/C$, la longitud de las placas es $L = 11.0\,cm$ y la separación *d*, entre ellas es de 2.0 *cm*. (La masa del electrón $m_e = 9.11 \times 10^{-31} Kg$, y la carga del electrón $q_e = -1.6 \times 10^{-19} C$).

a) Si $\theta = 40°$, ¿alcanzará el electrón a golpear la placa 2?
b) ¿Cuál debe ser el ángulo de lanzamiento del electrón para que evite golpear la placa 2 y logre un alcance máximo?
c) ¿Puede un electrón salir por la derecha del condensador, evitando el contacto con las dos placas?
d) Si se quita el campo eléctrico y se aplica un campo magnético **B** perpendicular a v_0, la partícula será desviada en una trayectoria circular como se ilustra en la figura 5.2. El campo magnético es uniforme y se aplica en toda la región marcada con crucecitas en la figura. ¿Cuál debe ser el valor mínimo de **B** para evitar que un electrón lanzado a un ángulo de 90° golpee la placa 2?
e) Si en lugar de un electrón se lanzara una partícula la de masa mayor, digamos un protón, hacia la derecha y cual sería el **B** mínimo para evitar la colisión con la placa 2? (La masa del protón es $m_p = 1.67 \times 10^{-19} Kg$, y su carga es $q_p = 1.6 \times 10^{-19} C$). La dinámica de las partículas cargadas es importante en el diseño de aparatos como el selector de velocidades y el espectrómetro de masas, instrumentos que permiten separar iones moleculares.

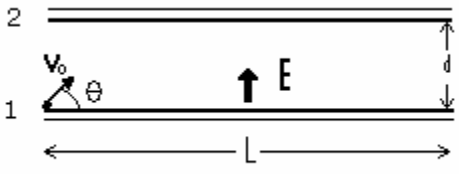


Figura 5.1

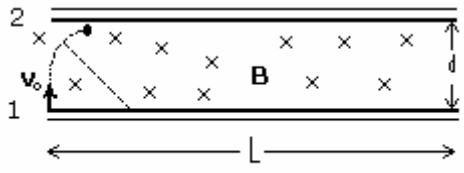


Figura 5.2

Solución:

El campo eléctrico produce una fuerza $\vec{F} = q_e\vec{E}$, la cual es opuesta a $\vec{E}$ debido a que la carga es negativa.

Entonces la aceleración que desvía al electrón en la trayectoria parabólica es $a_y = -\left(e/m_e\right)E$. Estamos considerando la dirección de *y* como la que va la placa 1 a la placa 2, y la dirección *x* de la izquierda a derecha en las figuras. Tanto *x* como *y* se miden a partir de un origen situado en el punto de lanzamiento del electrón en la orilla izquierda de la placa 1.

a) Para investigar si el electrón toca o no a la placa 2 se puede hacer de diferentes formas. A continuación se presentan algunas

i. Usando la ecuación

$$v_y^2 = v_0^2 sen^2\theta + 2a_y y \qquad 5.1$$

Podemos calcular el máximo alcance en la dirección *y* y compararlo con *d*. Haciendo $v_y = 0$ en la ecuación anterior, obtenemos

$$y_{\max} = \frac{v_0^2 sen^2\theta}{2\left(e/m_e\right)E} \qquad 5.2$$

Sustituyendo los valores numéricos se encuentran que $y_{\max} = 2.117\ cm$. Como este valor excede a la separación de las placas (d = 2.0 *cm*), se concluye que el electrón golpea a la placa 2.

ii. Podemos hacer $y(t) = d$ usando la ecuación

$$y(t) = v_0 sen\theta t + \frac{1}{2}a_y t^2 \qquad 5.3$$

Para determinar si la ecuación cuadrática resultante posee soluciones reales. Haciendo lo anterior se obtiene

$$\frac{eE}{2m_e}t^2 - v_0 sen\theta t + d = 0 \qquad 5.4$$

Como es de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, tendrá soluciones reales sólo si el discriminante $D = b^2 - 4ac \geq 0$, y si esto ocurre significa que el electrón toca a la placa 2. Evaluando *D* obtenemos:

$$D = \left(-v_0 sen\theta\right)^2 - 4\left(\frac{eE}{2m_e}\right)d \qquad 5.5$$

Que al sustituir los valores numéricos se obtiene $D = 8.23\times10^{11}$, la cual es mayor que cero, y por lo tanto se concluye que el electrón golpea a la placa 2.

b) Tenemos los siguientes métodos:

i. Usamos la ecuación (5.1) haciendo $y_{\max} = d$ para despejar el nuevo ángulo θ. Haciendo esto se obtiene:

$$\theta = Arcsen\left(\frac{\sqrt{2eEd/m_e}}{v_0}\right), \qquad 5.6$$

Que al evaluar da como resultado

$$\theta = 38.66°$$

En vista de que este ángulo es menor que 45°, es éste el que permite el máximo alcance posible. Es importante mencionar la comparación con 45°, ya que si θ hubiera tenido un valor mayor que éste ultimo, no podría concluirse que θ es el que permite el máximo alcance.

ii. Haciendo *D = 0* en la ecuación (5.5) se tiene

$$v_0^2 sen^2\theta - \frac{2edE}{m_e} = 0 \qquad 5.7$$

Donde despejamos θ, dando como resultado

$$\theta = Arcsen\left(\frac{\sqrt{2eEd/m_e}}{v_0}\right) = 38.66°, \qquad 5.7$$

Que es exactamente el valor que obtuvimos por el método anterior.

c). Usando el ángulo encontrado en el inciso anterior (38.66°), calculamos el "tiempo de vuelo" t_v del electrón usando la ecuación (5.2). en la cual hacemos $y = 0$, para obtener

$$v_0 sen\theta t_v - \left(\frac{eE}{2m_e}\right)t_v^2 = 0 \qquad 5.8$$

La solución $t_v = 0$ se descarta ya que corresponde al momento de disparo del electrón, así que nos quedamos con la otra solución, que es

$$t_v = \frac{2m_e v_0 sen\theta}{eE} = 2.079\times10^{-8}\,\text{s} \qquad 5.9$$

El alcance máximo es simplemente

$$R = (v_0 \cos\theta)t_v$$

$$R = \frac{m_e v_0^2}{eE} sen2\theta$$

Al evaluar se obtiene $R = 9.899$ *cm*. Como el alcance máximo resulto ser menor que la longitud de la placa 1, el electrón no podrá evitar impactarse con ella. Así que, para esta geometría particular del condensador, no es posible que un electrón hacia la derecha evitando tocar a las dos placas.

c) De acuerdo con la figura 5.2, la fuerza de Lorentz que desvía a un electrón hacia la derecha deberá estar dirigido hacia adentro de la página (ya que se trata de una partícula con carga negativa). La magnitud de dicha fuerza es

$$F = |q_e v_0 B|$$

La cual a su vez es igual a $m_e a_c$ donde es la aceleración centrípeta, cuya magnitud es

$$a_c = \left(\frac{v_0^2}{r}\right)$$

Entonces, la magnitud del campo necesario para desviar al electrón en una trayectoria circular de radio *r* es

$$B = \frac{m_e v_0}{|q_e| r}$$

Y si no queremos que golpee la placa 2, *r* debe ser menor que *d*, esto es esto impone sobre *B* una cota inferior:

$$B > \frac{m_e v_0}{|q_e| d} = 1.708 \text{ mT}$$

El campo magnético debe ser mayor que 1.708×10^{-3} Teslas. Para el caso del protón, el campo magnético deberá aplicarse en sentido contrario (hacia fuera de la página), y su cota inferior será

$$B > \frac{m_p v_0}{q_p d} = 3.131 \text{ T}.$$

■

Problema 6: Asistes con tus compañeros de escuela a la función inaugural de un gran circo de tradición. El número más impresionante, Strongman se tiende en el suelo con una gruesa placa de acero sobre su pecho e invita a una persona del público para que lo golpeé la placa con un marro de metal, poniendo en ello toda su energía. Strongman sale del trance con sus costillas intactas y tú con el recuerdo del chocar de los dos metales, te preguntas cómo es posible esto.

Asume que la masa de la placa es aproximadamente nueve veces la masa del marro para calcular qué fracción de energía cinética del mismo es transferida a la placa

Problema 7. Un muchacho trabaja en Acapulco en una lancha recogiendo monedas que arrojan los turistas al mar como se muestra la figura 7.1. Si se arroja desde la lancha a una altura H a recoger una moneda a una profundidad h y sus ojos enfocan la moneda de tal manera que ésta aparece en una línea visual haciendo un ángulo α con la vertical, ¿con qué velocidad horizontal inicial se tiene que arrojar para recoger la moneda?

Suponga que los ojos del muchacho están a una distancia l de las plantas de sus pies y que su centro de masa está en sus pies. Una vez dentro del agua, el muchacho desciende verticalmente.

Deje indicado el índice de refracción del agua como n.

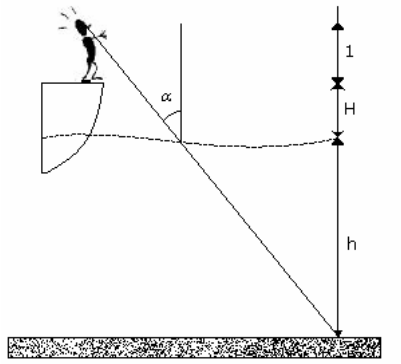


Figura 7.1

Se considera la siguiente figura

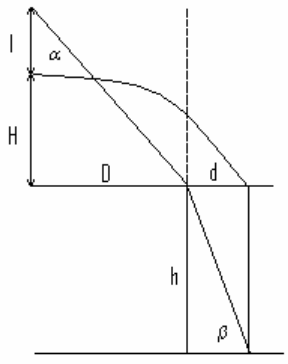


Figura 7.2

Solución:

Se calcula el tiempo que el muchacho tarda en caer al agua, esto es,

$$H = \frac{1}{2}gt^2 \text{ de donde } t = \left(\frac{2H}{g}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Durante el tiempo t, el muchacho recorre la distancia horizontal $v_0 t = D + d$ por lo que

$$v_0 = \frac{D+d}{\left(\frac{2H}{g}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

Para encontrar D y d se usa la figura 7.2, obteniéndose $D = (H+l)\tan\alpha$ y $d = h\tan\beta$, ahora resta encontrar β. La ley de Snell establece

$$n_1 sen\alpha = n_2 sen\beta$$

$$\beta = arcsen\left(\frac{n_1 sen\alpha}{n_2}\right)$$

Finalmente

$$v_0 = \frac{(H+l)\tan\alpha + h\tan\left(arcsen\left(\frac{n_1 sen\alpha}{n_2}\right)\right)}{\left(\frac{2H}{g}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

■

Problema 8. Sobre una mesa horizontal se encuentra un disco pequeño de masa m_1 que está unido mediante una cuerda inextensible con una pequeña esfera de masa m_2, como se nuestra la figura 8.1. La cuerda pasa por un orificio de la mesa, de tal manera que la masa m_2 queda colgada. La masa m_1 gira con velocidad v_0. El coeficiente de fricción entre la mesa y m_1 es μ. Si al principio la longitud de la cuerda sobre la mesa es r_0, encuentre qué distancia recorrerá la

masa m_1 hasta el orificio. Desprecie la velocidad de m_2.

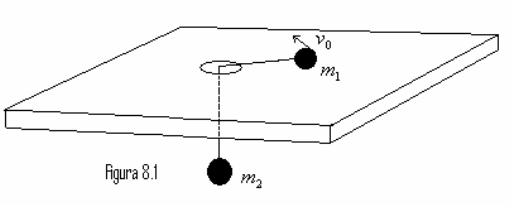


Figura 8.1

Solución:

La energía cinética inicial $\frac{1}{2}m_1v_0^2$. Medimos la energía potencial respecto al nivel de la mesa:

$$\frac{1}{2}m_1v_0^2 - m_2(l-r_0) = W_f + \frac{1}{2}m_1v_0^2 - m_2g(l-r)$$

Donde W_f es el trabajo de la fuerza de fricción

$$W_f = f_f d = \mu m_1 g d$$

Como despreciamos la velocidad de m_2, la tensión en la cuerda es $m_2 g$, y ésta proporciona la fuerza centrípeta m_1, entonces en cada punto de la trayectoria de m_1 se cumple

$$Fc = m_2 g = \frac{m_1 v_0^2}{r_0} = \frac{m_1 v^2}{r}$$

De donde se llega a

$$\frac{1}{2}m_1v_0^2 = \frac{1}{2}m_2r_0$$

$$\frac{1}{2}m_1v^2 = \frac{1}{2}m_2gr$$

Substituyendo en la primera ecuación

$$\frac{1}{2}m_2gr_0 - m_2g(l-r_0) = \mu m_1 g d + \frac{1}{2}m_2gr - m_2g(l-r)$$

$$\frac{1}{2}m_2g(r_0-r) + m_2g(r_0-r) = \mu m_1 g d$$

$$d = \frac{\frac{3}{2}m_2}{\mu m_1(r_0-r)}$$

Considerando $r = 0$

$$d = \frac{\frac{3}{2}m_2r_0}{\mu m_1}$$

■

Problema 8. a) ¿A qué distancia y en qué plano se debe colocar un satélite geoestacionario?

b) Calcular el número mínimo de satélites geoestacionario para que las únicas zonas no cubiertas por la red de comunicaciones sean polares.

c) Si se colocara un satélite de exploración en órbita polar, esto es, que su órbita pase por los polos, ¿Cuál es la condición para que en vueltas sucesivas no deje huecos en la exploración?

Solución:

a) Para que un satélite terrestre sea geoestacionario tiene que estar en el plano ecuatorial y su periodo de revolución debe ser de 86,400 *s* (un día). Para calcular a qué distancia del centro de la Tierra debe colocarse, hay que igualar la atracción gravitacional a la fuerza centrípeta; es decir

$$G = \frac{M_T m_s}{r^2} = \frac{m_s v^2}{r} = \frac{4\pi^2 m_s r}{\tau^2}$$

En donde M_T es la masa de la Tierra, m_s la masa del satélite, τ su periodo y r su distancia al centro de la Tierra. Despejando r se obtiene

$$r = \left(\frac{GM_T\tau^2}{4\pi^2}\right)$$

Sustituyendo los valores numéricos de las diferentes cantidades se obtiene $r = 42{,}300\ km$.

c) De la geometría mostrada en la figura 9.1 encontramos:

$$\frac{R}{r} = \cos\theta = \frac{6366}{42300} = 0.15$$

En donde R es el radio de la Tierra. De esta ecuación resulta $\theta = 81°$ o bien $2\theta = 162°$, de tal forma que se requiere un mínimo de tres satélite.

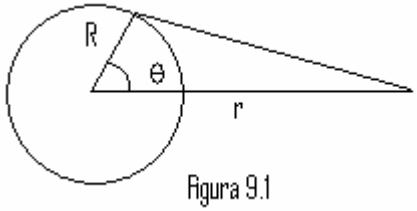


Figura 9.1

d) Si en el tiempo que tarda el satélite en dar una vuelta, la Tierra gira un ángulo igual que se observa desde el satélite (es decir, si $2\theta = \omega_T \tau$, en donde ω_T es la velocidad angular de la Tierra y τ es el periodo del satélite), entonces se tiene, del inciso b).

$$\cos\frac{\omega_T T}{2} = \frac{R}{r}$$

pero

$$T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{GM_T}$$

Por lo tanto, la condición buscada es

$$\cos\frac{2\pi\omega_T r^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{GM_T}} = \frac{R}{r}$$

Problema 10. a) Una boya consiste en un cilindro sólido de radio *a* y longitud *l* construida de un material liviano de densidad *d*. El cilindro tiene adosado en su parte inferior y a la mitad de su longitud, una varilla perpendicular al eje del cilindro, como se muestra en la figura 10.1

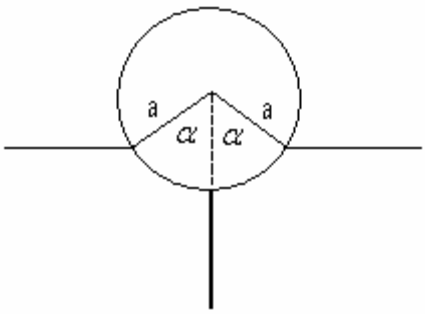


Figura 10.1

La masa de la varilla es igual a la masa del cilindro y su longitud es igual al diámetro del cilindro. Esta boya está flotando en agua de mar (de densidad ρ).

Para la situación de equilibrio, encuentre una expresión que relacione el ángulo de flotación α con la relación de densidades d/ρ. Para estos cálculos considere despreciables el volumen de la varilla.

b) Suponga ahora que, mediante una acción externa momentánea, la boya es hundida verticalmente una distancia pequeña *z*. Una vez liberada, la boya experimentará un empuje neto hacia arriba, que la hará oscilar verticalmente alrededor de su posición de equilibrio.

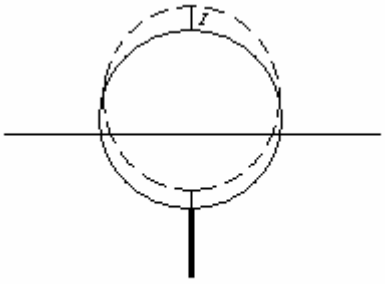


Figura 10.2

Determine la frecuencia de oscilación en términos de g, α y a, siendo g la aceleración de la gravedad. Suponga que la influencia del movimiento del agua en la dinámica de la boya es equivalente a un incremento de su masa inercial en un valor igual a

un tercio de la misma. Considere que α no es pequeño.

c) Suponga ahora que la boya oscila alrededor de un eje horizontal como se ilustra en la figura 10.3. En la aproximación de que este eje coincida con el que pasa por el centro del cilindro, determine la frecuencia de oscilación en términos de *g* y *a*. En este caso, desprecie el movimiento y la viscosidad del agua y considere que el ángulo de oscilación es pequeño.

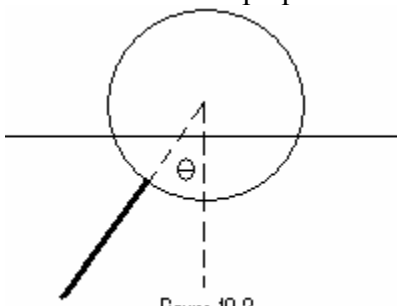


Figura 10.3

d) La boya contiene dispositivos que pueden medir los parámetros de los movimientos oscilatorios vertical y horizontal. Esta información puede ser enviada por radio a un puesto de la costa. En aguas relativamente calmadas se registra que la oscilación vertical tiene un periodo de aproximadamente *1s* y el movimiento de balanceo tiene un periodo de aproximadamente *1.5 s*. A partir de esta información, pruebe que el ángulo de flotación tiene un valor cercano a *90°* y calcule el radio de la boya y su masa total, considerando que el cilindro tiene una longitud *l* igual a su radio *a*.

Considere que $\rho \cong 1000 \ \ kg\,m^{-3}$ y $g \cong 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.

Solución:

a) La masa de la varilla es igual a la masa *M* del cilindro, la cual, a su vez es $M = \pi a^2 l d$, en donde *d* es la densidad del material. Así, la masa total es $2M = 2\pi a^2 l d$. La masa del agua desplazada es menor que $\pi a^2 l \rho$ (en donde ρ es la densidad del agua). Usando el principio de Arquímedes, lo menos que podemos esperar es que

$$2\pi a^2 l d < \pi a^2 l \rho$$

O bien que $d < \dfrac{\rho}{2}$

De hecho, conociendo el ángulo de flotación $\alpha(<\pi)$ (véase figura 10.4), se puede calcular geométricamente el volumen del agua desplazada

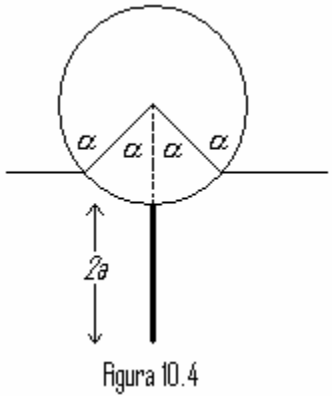


Figura 10.4

$$V = la^2\alpha - la^2 sen\alpha \cos\alpha$$

Por el principio de Arquímedes, la masa de la boya es igual a la masa del agua desplazada. Por lo tanto, $2\pi a^2 l d = la^2\rho(\alpha - sen\alpha\cos\alpha)$; es decir, α queda determinada por la relación

$$\alpha - \cos\alpha sen\alpha = \frac{2d\pi}{\rho}$$

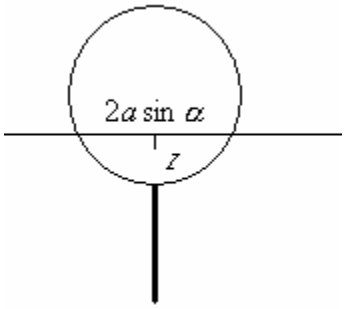
b) Si se empuja al cilindro verticalmente hacia abajo una distancia pequeña z, la fuerza total hacia arriba sobre el cilindro será el peso del agua extra desplazada; es decir $2\rho alz sen\alpha$, dirigida en sentido contrario a z. Esta fuerza es característica del movimiento armónico simple y, en consecuencia, la ecuación de movimiento de la boya

(tomando en cuenta el factor adicional ⅓) es

$$\frac{8M\ddot{z}}{3} = -2\rho glzasen\alpha$$

O

$$\ddot{z} + \frac{3\rho gsen\alpha}{4\pi da} z = 0$$



Que es la ecuación senoidal común del oscilador armónico. La solución es del tipo $z = z_0 sen(\omega_z t)$, con una frecuencia angular

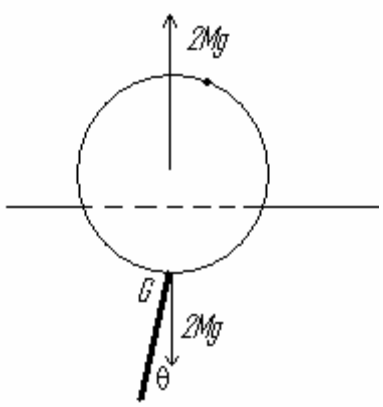
$$\omega_z = \left(\frac{3\rho gsen\alpha}{4\pi da}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{3gsen\alpha}{2a(\alpha - \cos\alpha sen\alpha)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

en donde se han usado las relaciones finales de la parte a). Alternativamente

$$\omega_z = \left(\frac{3\rho galsen\alpha}{2M}\right)^{\frac{1}{2}}$$

En donde *M = masa de la boya* debe determinarse antes y referirse al resultado obtenido.

c) Sin importar la torca, si la boya se desplaza un cierto ángulo de tal forma que su peso es soportado por el agua, el volumen de agua desplazado es igual que en el caso de equilibrio. Así, el centro de flotación permanece a la misma distancia del centro del cilindro. En consecuencia, el arco de oscilación es un círculo centrado en el eje del cilindro. En otras palabras, el metacentro *M* del movimiento oscilatorio es el centro del cilindro.



También debe notarse que el centro de la masa *G* de la boya es el punto en el que la barra toca el cilindro, ya que sus masas son iguales. Naturalmente, sobre el cilindro actuará una torca neta cuando se separe la barra de su posición vertical. Para calcular el periodo de oscilación, primero hay que determinar el momento de inercia del cilindro entorno a su eje. Si *M* es la masa del cilindro,

$$I_0 = \frac{Ma^2}{2} = \int_0^a r^2 dm = \int_0^a \frac{r^2 2Mrdr}{a}$$

El siguiente paso es encontrar el momento de inercia de la barra entorno a su punto medio

$$I_{rod} = \int \left(\frac{Mdx}{2a}\right) x^2 = \frac{Mx^3}{6a}\Big|_{-a}^{a} = \frac{Ma^2}{3}$$

Por último, usando el teorema de ejes paralelo se determina el momento de inercia de la boya (cilindro + barra) en torno al metacentro *M*

$$I_M = \frac{Ma^2}{2} + \frac{Ma^2}{3} + M(2a)^2 = \frac{29Ma^2}{6}$$

Cuando la boya oscila un ángulo θ en torno a su posición de equilibrio, la torca actuante es $2Mgasen\theta \cong 2Mga\theta$ (para ángulos pequeños), lo cual representa un movimiento armónico simple. Por lo tanto, la ecuación de movimiento es

$$I_M \ddot{\theta} \approx -2Mga\theta,$$

O bien,

$$\ddot{\theta}+\frac{12g}{29a}\theta=0$$

Cuya solución es una función senoidal, $\theta \approx sen(\omega_\theta t)$, con una frecuencia angular,

$$\omega_\theta=\sqrt{\frac{12g}{29a}}$$

d) Las medidas con el acelerómetro resultan en

$$\frac{T_\theta}{T_z}\cong 1.5$$

O bien

$$\left(\frac{\omega_z}{\omega_\theta}\right)^2\cong\frac{9}{4}\cong 2.25$$

Por lo tanto

$$2.25=\frac{\dfrac{3gsen\alpha}{2a(\alpha-\cos\alpha sen\alpha)}}{\dfrac{12g}{29a}}$$

Lo cual conduce a la ecuación trascendente

$$\alpha-sen\alpha\cos\alpha\cong 1.61sen\alpha$$

Como 1.61 no difiere mucho de q.57, se ha demostrado que una solución físicamente aceptable es $\alpha\approx\pi/2$, que era o que se quería probar. Haciendo $\alpha\approx\pi/2$, a partir de ahora (para simplificar el álgebra) se obtiene, con buena aproximación,

$$\omega_z^2=\frac{3g}{\pi a}\ \text{y}\ \frac{4d}{\rho}=1$$

Como el periodo vertical es de *1 s*,

$$1=\left(\frac{2\pi}{\omega_z}\right)^2=\frac{4\pi^3 a}{3g},$$

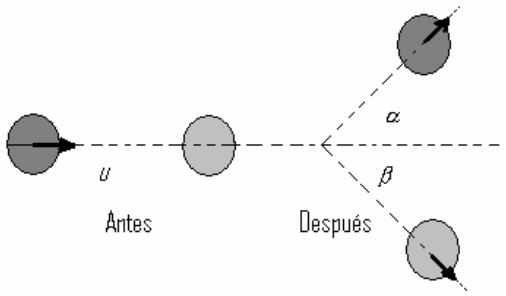
Lo cual da un radio $a=9.8/1.33\pi^2=0.237\,m$. La masa de la boya se obtiene entonces de

$$2M=2\pi a^2 ld=\frac{2\pi a^2\rho}{4}=\frac{\pi a^2\rho}{2}$$
$$=\pi(500)(0.237)^2=20.9\ kg$$

Problema 11. Un conocimiento adquirido por la experiencia, entre los jugadores de billar es el de que una vez que una bola en movimiento golpea de lado a otra bola estacionaria, el ángulo entre sus trayectorias divergentes es de $\alpha+\beta=90°$.

Demuestre que esta regla es una consecuencia de la conservación del momento lineal y de la conservación de la energía.

Nota, en la práctica esto no se cumple exactamente pues el proceso está sujeto a energía rotacional de las bolas.



Solución:

Para una bola de masa *m* que golpea con una velocidad u otra estacionaria y de la misma masa, se tiene en el eje del movimiento

$$mu=mv\cos\alpha+mv'\cos\beta \qquad 11.1$$

En el eje perpendicular

$$0=mvsen\alpha-mv'sen\beta \qquad 11.2$$

La conservación de la energía es

$$\frac{1}{2}mu^2=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}mv'^2 \qquad 11.3$$

Ahora si elevamos al cuadrado las ecuaciones (11.1) y (11.2) y las sumamos obtenemos:

$$u^2=(v\cos\alpha+v'\cos\beta)^2+(vsen\alpha-v'sen\beta)^2$$
$$=v^2+v'^2+2vv'\cos\alpha\cos\beta-2vv'sen\alpha sen\beta$$

Expresión que de acuerdo con (11.3) se reduce a

$$0=\cos\alpha\cos\beta-sen\alpha sen\beta=\cos(\alpha+\beta)$$

De manera que $(\alpha+\beta=90)$, como se requiere.

■

Problema 12. Dos altoparlantes *A* y *B* están colocados como se muestra en la figura 12.1 a una distancia *d = 4 m* el uno del otro y emiten, en fase, una onda sonora de longitud de onda $\lambda = 1\,m$. Si nos colocamos sobre la recta *x* se hallan, tomando como origen la bocina *B*.

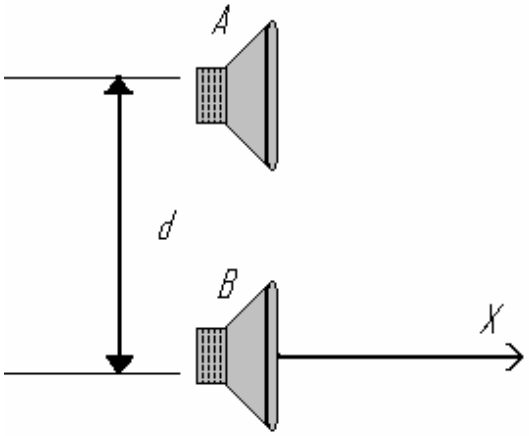


Figura 12.1

Solución:

Un punto *P* de la de la recta *x*, en el cual se note un mínimo, esta caracterizado por el hecho de que se encuentra en una línea nodal, esto es, un punto en el cual la diferencia en el valor absoluto de la distancia de las dos fuentes sonoras *A* y *B* es igual a un múltiplo impar de ½ y de aquí que,

$$\overline{AP} = \overline{BP} + \left(n-\frac{1}{2}\right)\lambda \qquad 12.1$$

Donde *n* es un número entero. De la figura 12.1 podemos escribir la siguiente relación

$$\overline{BP} < \overline{AP} < \overline{AB} + \overline{BP}$$

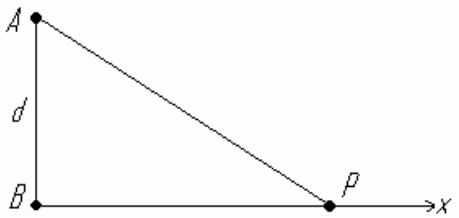


Figura 12.2

Que teniendo en cuenta la relación (12.1) nos lleva a escribir

$$0 < \left(n-\frac{1}{2}\right)\lambda < d \text{ de donde } \frac{1}{2} < n < \frac{d}{2}+\frac{1}{2}$$

Esto implica *n = 1,2,3,4.* es decir hay solo *4* mínimos. De la relación (2.1) e indicando por una *x* la distancia $\overline{BP}$ se obtiene

$$\sqrt{x^2+d^2} = x + \left(n-\frac{1}{2}\right)\lambda$$

Despejando,

$$x = \frac{d^2 - \left(n-\frac{1}{2}\right)^2\lambda^2}{2\lambda\left(n-\frac{1}{2}\right)}$$

Y sustituyendo *n = 1,2,3,4.* se obtiene

$$x_1 = 15.75m;\ \ x_2 = 4.58m;\ \ x_3 = 1.95m;$$
$$x_4 = 0.54m$$

Un modo alternativo de resolver el problema es considerando el ángulo que la *n-ésima* línea nodal forma con el eje central, de aquí

$$sen\theta = \left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{d}$$

esto acota los valores a,

$$0 < \left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{d} < 1$$

■

Problema 13. En los extremo de un resorte conductor de masa despreciable, de longitud l_0 y constante *k*, se fijan dos esferas metálicas de masa *m* y radio $r << l_0$. La capacidad para retener la carga eléctrica en el resorte es

despreciable en comparación a la de las dos esferas.

Cuando se transfiere una carga Q al sistema y éste se coloca sobre un plano horizontal sin fricción, las dos esferas comienzan a oscilar. Determine la elongación máxima del resorte.

Dado que la capacidad eléctrica del resorte eléctrica del resorte es despreciable. La carga Q se divide por igual entre dos esferas, $q = Q/2$ y dado que $l_0 >> r$ se puede asumir que la distribución de carga en las esferas es uniforme

En ausencia de fricción el sistema es conservativo. La energía total del sistema es la suma de la energía cinética T y la potencial U. Esta última se puede dividir en electrostática y elástica. La máximo elongación ocurre cuando la energía cinética es igual a cero.

Para la posición de máximo alargamiento podemos, por conservación de la energía, escribir

$$U_{es}(l_0) = U_{es}(l) + U_{el}(l)$$

De la cual se obtiene una ecuación en l

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{l_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{l} + \frac{1}{2}k(l-l_0)^2$$

Multiplicando por $2/k$ y haciendo el siguiente cambio de variable

$$L = \frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0 k l_0} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 k l_0}$$

Se tiene

$$L = \frac{l}{l_0}L + (l-l_0)^2 \Rightarrow (l-l_0)L = (l-l_0)^2 l$$

Dado que $l < l_0$ se puede dividir entre $(l-l_0)$ podemos hacer la siguiente simplificación,

$$l^2 - l_0 l - L = 0$$

Cuya solución final es

$$l = \frac{1}{2}\left(l_0 + \sqrt{l_0^2 + 4l}\right) = \frac{1}{2}\left(l_0 + \sqrt{l_0^2 + \frac{Q^2}{2\pi\varepsilon_0 k l_0}}\right)$$

habiendo ignorado la solución para $l_0 < 0$.

■

Problema 14. Un cazador incrusta un dardo de masa m en un pájaro que vuela en línea recta horizontal a una altura h sobre el suelo. Sabemos que el dardo incide detrás del ave con una velocidad v a un ángulo α con la vertical. El pájaro cae al suelo un tiempo t después de ser golpeado a una distancia d adelante del punto donde fue golpeado. Los datos del problema son m, h, v, d, α .

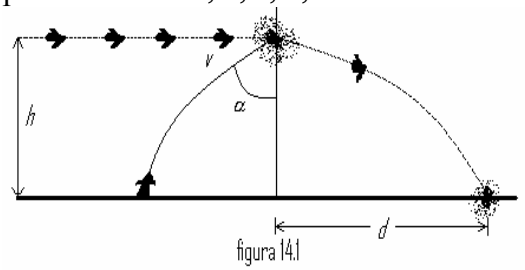


figura 14.1

a) Obtenga la masa M del pájaro.

b) Obtenga la rapidez $|v|$ a la que el pájaro volaba antes de ser golpeado por el dardo.

Solución:

a) El principio de conservación de la cantidad de movimiento para el sistema dardo pájaro es:

$$m\vec{v} + M\vec{V} = (m+M)\vec{V}_{dp}$$

Las componentes de la velocidad del dardo son datos del problema

$$v_x = v\,sen\alpha$$

$$v_y = v\cos\alpha$$

Por lo tanto el principio de conservación en sus dos componentes es,

$$mv\,sen\alpha + MV = (m+M)V_{dp_x}$$

$$mv\cos\alpha = (m+M)V_{dp_y}$$

A partir de la segunda relación obtenemos la velocidad vertical inicial del sistema dardo-pájaro. Ambos caerán juntos. La velocidad es

$$V_{dp_y} = \frac{mv\cos\alpha}{m+M}$$

La expresión para la altura del sistema dardo-pájaro en cualquier momento *t*, es

$$y = h + V_{dp_y}t - \frac{gt^2}{2} = h + \left(\frac{mv\cos\alpha}{m+M}\right)t - \frac{gt^2}{2}$$

Al golpear el suelo $y = 0$,

$$\frac{gt^2}{2}(m+M) = h(m+M) + tmv\cos\alpha$$

Agrupando

$$\left(\frac{gt^2}{2} - h\right)M = \left(tv\cos\alpha + h - \frac{gt^2}{2}\right)m$$

Finalmente

$$M = \frac{tv\cos\alpha + h - \dfrac{gt^2}{2}}{\left(\dfrac{gt^2}{2} - h\right)}m$$

b) Del principio de conservación de la cantidad de movimiento

$$MV = (m+M)V_{dp_x} - mvsen\alpha$$

Como el sistema dardo-pájaro se mueve horizontalmente con una velocidad uniforme

$$V_{dp_x}t = d$$

Finalmente se obtiene

$$V = \frac{m+M}{M}\frac{d}{t} - mvsen\alpha$$

■

Problema 15. Un electrón de masa *m* y carga e^- es lanzado con una velocidad *v* a lo largo de una trayectoria horizontal justo a la mitad de dos placas paralelas también horizontales, cada una de longitud *l* como se muestra en la figura 15.1.

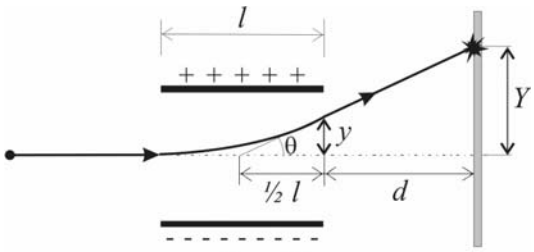


Figura 15.1

La intensidad del campo eléctrico es *E* y el campo apunta hacia abajo. Una pantalla fluorescente se coloca a una distancia *d* de las placas obtenga las fórmulas para.

a) EL desplazamiento vertical *y* del electrón justo cuando abandona las placas deflectoras.
b) El ángulo θ que hace trayectorias del electrón con eje horizontal después de abandonar las placas.
c) La distancia vertical *Y* del eje al punto donde el electrón golpea la pantalla.

Solución:

a) La fuerza eléctrica sobre el electrón es igual a la masa multiplicada por la aceleración vertical del electrón.

$$E(e) = ma_y \text{ es decir } a_y = \frac{Ee}{m}$$

El tiempo que tarda el electrón en atravesar las placas es

$$t = \frac{l}{v}$$

El desplazamiento vertical cuando deja las placas es

$$y = \frac{1}{2}a_y t^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{eE}{m}\right)\left(\frac{l}{v}\right)^2$$

b) Para hallar el ángulo, de la figura 15.1 se obtiene

$$\tan\theta = \frac{y}{\left(\dfrac{1}{2}\right)l} = \frac{Eel}{mv^2}$$

c). Del inciso anterior podemos despejar *Y* para poder hallar la distancia vertical donde golpea la pantalla el electrón

$$Y = \left(\frac{1}{2}l + d\right)\tan\theta = \left(\frac{1}{2}l + d\right)\frac{Eel}{mv^2}$$

■

Problema 16. En los vértices de un triángulo equilátero de lado *a* se encuentran tres puntos. Ellos empiezan a moverse simultáneamente con una rapidez constante *v*, con la particularidad de que el primer punto mantiene invariablemente su curso hacia el segundo, el segundo, hacia el tercero y el tercero, hacia el primero. ¿Pasado qué tiempo se encontrarán?

Solución:

Supongamos que transcurre un lapso muy corto de tiempo, entonces las partículas ocuparán nuevas posiciones como se muestra en la figura siguiente:

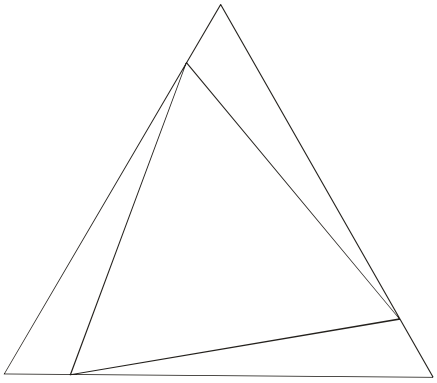


Figura 16.1

Se observa que los puntos de las nuevas posiciones de las partículas forman un triángulo equilátero inscrito en el triángulo original. Si dejamos pasar otro intervalo de tiempo las nuevas posiciones serán:

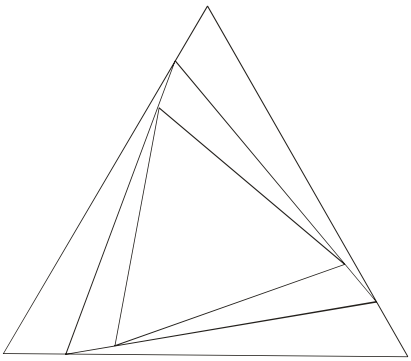


Figura 16.2

Se obtiene un nuevo triángulo equilátero inscrito en el triángulo intermedio. Repitiendo la operación un cierto número de veces se encontrará una figura como la que aparece a continuación:

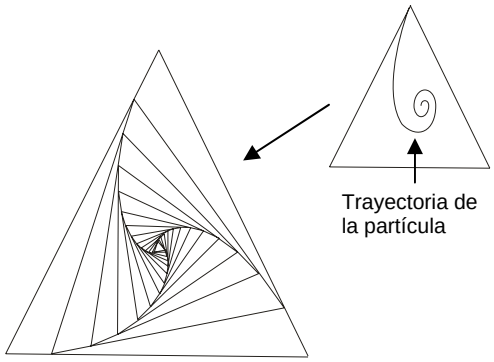
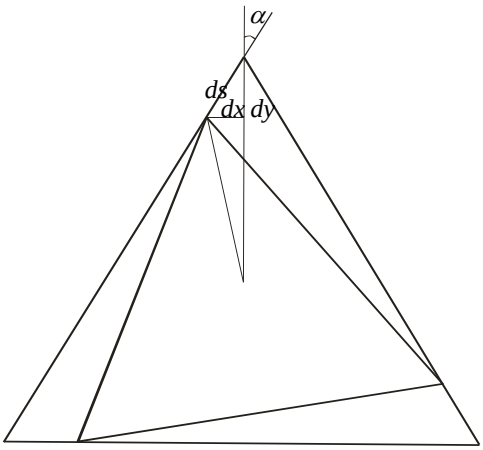


Figura 16.3

De esta figura se pueden extraer dos conclusiones: la trayectoria de cualquier de los puntos es la misma y se trata de una espira, además las trayectorias terminan en el punto central del triángulo original. La siguiente tarea consiste en hallar la ecuación de la trayectoria espiral. Volvamos a la figura 16.1



De la figura anterior tenemos que:

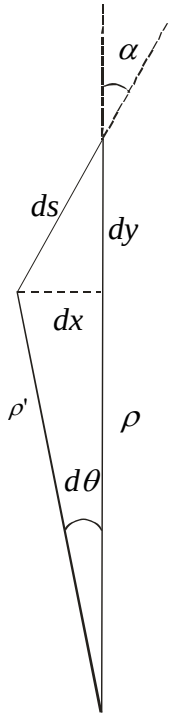


Figura 16.4

La cantidad *ds* representa un elemento de arco infinitesimal, *dx* y *dy* son los desplazamiento diferenciales en las direcciones *x* y *y* del punto, α es el ángulo entre la vertical y la recta tangente al arco, $d\theta$ es el cambio infinitesimal del ángulo del sector y, ρ y ρ' son las distancias representativas del punto al centro del triángulo.

La definición de longitud de arco nos dice que:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

$$= \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

De la figura 16.4 se observa que $\frac{dy}{dx} = \cot\alpha$, por lo cual:

$$ds = \sqrt{1 + \cot^2\alpha}\, dx$$
$$= \sqrt{\csc^2\alpha}\, dx$$
$$= \frac{dx}{sen\alpha}$$

Por lo tanto

$$ds = \frac{dx}{sen\alpha} \qquad 16.1$$

Por otro lado, utilizando la definición de ángulo en radianes:

$$d\theta = \frac{dx}{\rho}$$

Por lo que $dx = \rho d\theta$, sustituyendo en la ecuación (16.1)

$$ds = \frac{\rho d\theta}{sen\alpha} \qquad 16.2$$

De la figura 16.4 se deduce que

$$\rho = \rho'\cos(d\theta) + (ds)\cos\alpha$$

Pero $\cos(d\theta \approx 1)$, entonces

$$\rho = \rho' + (ds)\cos\alpha$$

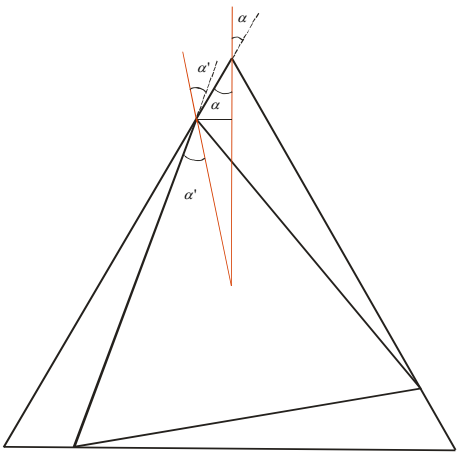
Y dado que $\rho = \rho' - d\rho$:

$$\rho \approx \rho + d\rho + (ds)\cos\alpha$$
$$\Rightarrow \quad d\rho = (ds)\cos\alpha$$

Usando la ecuación (16.2)

$$d\rho = \frac{\rho d\theta}{sen\alpha}\cos\alpha = (\cot\alpha)\rho d\theta \qquad 16.3$$

Para continuar es necesario intuir un importante aspecto. En la trayectoria de la partícula: el ángulo α en cualquier punto de la trayectoria debe ser el mismo.



Es claro que $\alpha = \alpha'$puesto que todos los triángulos sucesivos, que se van formando al unir los puntos que ocupan las partículas, son equiláteros. Puesto que los ángulos internos de un triángulo equilátero son iguales a $60°$ entonces $\alpha = 30°$; y como $\cot 30° = \sqrt{3}$ entonces la ecuación (16.3) se rescribe así:

$$d\rho = \sqrt{3}\rho d\theta$$

Integrando esta ecuación con la condición inicial $\rho(0) = \rho_0$ se tiene

$$\rho(\theta) = \rho_0 e^{\sqrt{3}\theta}\ , \quad \theta \in (-\infty, +\infty)$$

Esta es la ecuación de la trayectoria espiral.

En coordenadas polares el elemento de arco infinitesimal esta dado por la expresión: